

文章编号: 1000-7598 (2013) 11-3277-07

加筋材料动态松弛有限元模型的建立及应用

彭芳乐^{1,2}, 华 针^{1,2}, 曹延波^{1,2}

(1. 同济大学 地下建筑与工程系, 上海 200092; 2. 同济大学 岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092)

摘 要: 为分析加筋材料的抗弯刚度对加筋性能的影响, 加筋材料采用梁单元形式。基于动态松弛法, 通过定义梁单元的刚度矩阵, 求解内力矢量, 随后定义虚拟质量密度而建立总质量矩阵, 将加筋材料的梁单元有限元模型嵌入到已有的动态松弛法求解程序中。通过对简支梁的简单加载模拟验证了该梁单元模型的准确性能。随后, 将该有限元模型与已有的动态松弛法计算程序结合 (含砂土本构及弱面单元模型), 对加筋砂土地基室内模型试验进行了数值模拟。将梁单元的模拟结果与杆单元 (梁单元的特例) 模拟结果进行了比较, 并分别探讨了抗拉刚度和抗弯刚度对加筋砂土地基承载性能的影响。结果表明: 抗拉刚度对承载能力的影响较小; 抗弯刚度对承载力的影响程度与加筋材料的布置形式有关, 特别是当加筋砂土中出现剪切带以后, 其影响逐渐增大。因此, 在分析加筋砂土结构的增强机制时, 建议采用梁单元 (具有一定的抗弯刚度) 对加筋材料进行模拟。

关 键 词: 加筋土; 加筋材料; 动态松弛法; 有限元法; 梁单元; 刚度效应

中图分类号: O 319.56

文献标识码: A

Finite element modeling of reinforced material based on dynamic relaxation method and its application

PENG Fang-le^{1,2}, HUA Zhen^{1,2}, CAO Yan-bo^{1,2}

(1. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China)

Abstract: To analyze the influence of bending stiffness of reinforcement on the bearing capacity of reinforced soil structures, the beam element form is applied to modeling for reinforcement. Based on the dynamic relaxation (DR) method, the finite element model of beam element simulating reinforcement is presented. Firstly, the beam element stiffness matrix is constructed and the solution to internal force vector is obtained. Then, the fictitious mass density is defined just for numerical purposes and a mass matrix is established. The beam model is embedded in the existing dynamic relaxation calculation program. To validate the performance and accuracy of the beam element model, the loading simulation of simple beam is conducted. Subsequently model, the numerical study for the reinforced sandy ground physical model test is carried out by combining the beam element model and the DR calculation program (including the sand constitutive and the interface models). The comparison of simulation results between the beam element model and bar element model are conducted. The influences of tensile stiffness and bending stiffness on the bearing capacities of reinforced sand foundation are discussed respectively. The simulation results show that the tensile stiffness has little effect on the bearing capacity of the reinforced sand foundation. The influence of bending stiffness on bearing capacity is related to the reinforcement layout; especially when the shear band occurs in the reinforced sand structures, the impact will increase. Thus, to analyze the reinforced mechanism of reinforced sand structures, the beam element is recommended (with bending stiffness) in the simulation procedure.

Key words: reinforced sand; reinforced material; dynamic relaxation method; finite element method(FEM); beam element; stiffness effect

1 引 言

从法国工程师 Henri Vidal 在 1965 年首次提出现代加筋土的概念开始, 加筋土得到了广泛应用。

国内外学者对加筋土展开了大量的研究, 其中采用有限元对加筋土加固机制和变性破坏的数值模拟是一个研究热点。由于加筋土结构是筋材和土组合而成的复合结构, 表现出显著的材料非线性, 因此,

收稿日期: 2013-05-29

基金项目: 国家自然科学基金(No. 51279132); 教育部长江学者和创新团队发展计划(No. IRT1029)。

第一作者简介: 彭芳乐, 男, 1965 年生, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为岩土力学、地下空间与工程等。E-mail: pengfangle@tongji.edu.cn

涉及到非线性方程的求解。目前,有限元程序多采用 Newton-Raphson、修正的 Newton-Raphson^[1]和拟 Newton^[2]等迭代法求解非线性方程。而这些迭代法存在一个问题:当有限元模型中的单元进入塑性并将发生破坏时,迭代次数会急剧增加,尤其对于具有高剪胀性的非线性材料,很难达到收敛。而 Day^[3]和 Otter^[4]在 20 世纪 60 年代中期结合中心差分法提出的动态松弛(DR)法,是一种显式的求解方法,它将非线性问题转化为动力学问题,不需形成矩阵,并且迭代计算简单,求解高非线性方程具有显著优势。同时它的显式性质使计算甚至在峰值后应变软化阶段都能够追踪整个平衡路径,将材料的软化特性表现出来^[5-7],但这种方法应用于离散元法中^[8-9]较多,在有限元中应用很少。

随后, Tanaka 和 Kawamoto^[10]将 DR 法用于三维弹塑性有限元中,成功地模拟了土工结构的破坏。近些年尤其是东京大学及东京理工大学龙岗文夫研究室^[11-14]将 DR 法和高精度砂土的本构模型结合起来,开发了相应的有限元程序,进行了一系列的数值研究,精确模拟了砂土平面应变压缩试验和承载能力试验,也反映了动态松弛法求解非线性问题的优越性能。

基于加筋砂土室内平面应变试验,拟对其进行有限元分析,由于加筋土结构其他组成部分的有限元模型的构建在笔者发表的文章中详细论述,本文将重点介绍基于 DR 法的加筋材料的有限元模型构建,并将其有限元实现的程序嵌入到前面已有的程序中,实现加筋砂土的数值模拟,并探讨该部分算法的有效性。

抗拉加筋材料,其加固效应主要由轴向抗拉刚度提供,而由剪切和抗弯刚度引起的加固效应较小。在有限元中,具有一定的抗弯刚度的加筋材料,例如金属带,可以采用梁单元模拟;而没有抗弯刚度或抗弯刚度很小的加筋材料可以采用杆单元模拟。前面的研究基本采用杆或梁单元作为筋材的有限元单元,但都没有对两者之间各自的适用性以及加筋土地基的力学性能的影响做相对的比较。本文将梁单元加入到 DR 法中,首先通过建立梁单元的有限元模型,对简支梁进行了模拟,验证了该梁单元的合理性。随后结合加筋砂土地基室内试验数值模拟,对加筋土结构的力学性能进行了研究。探讨了加筋材料的抗拉和抗弯刚度对加筋砂土结构力学性能的影响;并通过分别使用梁单元和杆单元对加筋材料进行有限元模型的建立,研究了加筋土结构中加筋材料的力学性能,分析了两种单元在加筋土结

构不同加载时期的适用性以及加筋砂土承载能力的影响。

2 动态松弛(DR)法

动态松弛法通过引入虚拟的动态阻尼振动来代替相同结构下的静力系统,同时采用向后时步显式迭代法进行更新,最终令系统在阻尼作用下得到静态平衡。在迭代过程中无需形成结构的刚度矩阵,因此,计算时间消耗较少。

2.1 动力松弛的控制方程

非线性有限元的平衡控制方程为

$$\mathbf{P} - \mathbf{P}^{\text{init}} = \mathbf{F} \quad (1)$$

并且

$$\mathbf{P} = \sum_N \int_{v_e} \mathbf{B} \boldsymbol{\sigma} dv \quad (2)$$

式中: $\mathbf{P}$ 为内力向量; $\mathbf{P}^{\text{init}}$ 为初始应力引起的节点力向量; $\mathbf{F}$ 为外力向量; $\mathbf{B}$ 为位移-应变转换矩阵; N 为有限元法中离散单元数; $\boldsymbol{\sigma}$ 为每个单元的应力向量; v_e 为每个单元的体积。

动态松弛法是将上述静力学问题看作动力学问题处理,即通过引入惯性力与阻尼力求解运动方程的稳态响应来获得上述平衡方程式(1)、(2)的解。运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{P} - \mathbf{P}^{\text{init}} = \mathbf{F} \quad (3)$$

式中: $\mathbf{M}$ 为整体质量矩阵; $\mathbf{c}$ 为阻尼系数; $\ddot{\mathbf{u}}$ 为加速度向量; $\dot{\mathbf{u}}$ 为速度向量。

动态松弛法为显式算法,将中心差分法用于式(3)可得到 t 时刻的速度矢量和加速度矢量,分别为

$$\dot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (4)$$

$$\ddot{\mathbf{u}} = \frac{\mathbf{u}^{t+\Delta t} - 2\mathbf{u}^t + \mathbf{u}^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \quad (5)$$

式中: Δt 为时间增量; $\mathbf{u}^{t-\Delta t}$ 、 $\mathbf{u}^t$ 和 $\mathbf{u}^{t+\Delta t}$ 分别为时间 $t - \Delta t$ 、 t 和 $t + \Delta t$ 时的位移矢量。

为获得动态松弛法的形式,采用阻尼矩阵

$$\mathbf{c} = \alpha \mathbf{M} \quad (6)$$

将式(4)~(6)代入式(3),则得到动态松弛法的控制方程为

$$\mathbf{u}^{t+\Delta t} = \frac{1}{1 + 0.5\alpha\Delta t} \left[\frac{\Delta t^2}{\mathbf{M}} (\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\text{init}})^t + 2\mathbf{u}^t - (1 - 0.5\alpha\Delta t) \mathbf{u}^{t-\Delta t} \right] \quad (7)$$

式中: α 为阻尼比。

2.2 阻尼比 α 的确定

研究者试着寻找临界阻尼比 α , 使其能够保证动态松弛法迭代计算的收敛^[15-16], 其中, Bunce^[17]建议使用 Rayleigh 系数确定阻尼比, 即

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{\mathbf{x}^T \mathbf{K} \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x}}} \quad (8)$$

式中: $\mathbf{x}$ 为特征向量; $\mathbf{K}$ 为整体刚度矩阵。当 $\mathbf{x}$ 是与最低阶频率对应的特征向量时, Rayleigh 系数可以准确地给出线性问题临界阻尼比。

考虑动态松弛法中阻尼力的虚拟特点, 临界阻尼比的取值要能够使系统的振荡归于收敛。因此, 采用以下近似: 特征向量 $\mathbf{x}$ 用 t 时刻的速度向量 $\dot{\mathbf{u}}^t$ 来近似, 也可用位移向量 $\mathbf{u}$ 的增量; 整体质量矩阵 $\mathbf{M}$ 采用对角矩阵 $\mathbf{m}$ 来近似可以达到理想效果; 整体刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 可用对角切线刚度矩阵 $\mathbf{K}^t$ 来近似取值^[7], 如下所示:

$$\mathbf{K}^t = \frac{\mathbf{P}^t - \mathbf{P}^{t-\Delta t}}{\Delta t \cdot \dot{\mathbf{u}}^t} \quad (9)$$

式中: $\mathbf{P}^t$ 和 $\mathbf{P}^{t-\Delta t}$ 分别为 t 和 $t - \Delta t$ 时刻的内力向量。将上述这些近似形式用目前的求解参数代入到式 (8) 中, 可得到临界阻尼比的估计值为

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{\mathbf{u}^T \mathbf{K}^t \mathbf{u}}{\mathbf{u}^T \mathbf{m} \mathbf{u}}} \quad (10)$$

2.3 数值计算稳定性

动态松弛法基于一种显式积分方案, 它的解是有条件的稳定。即积分方案所要求的时间步长要小于临界时间步长。这是由著名的 Courant-Friedrichs-Levy 条件^[18], 即

$$\Delta t \leq \beta \frac{L}{V} \quad (11)$$

式中: Δt 为变形波从一个节点传到相邻节点所需要的时间步; L 为单元上相邻两个节点间距离; V 为介质中弹性压缩波速; β 为稳定性强制因子 ($\beta < 1.0$)。对于常应变单元, β 的值接近 1.0, 但对于高阶单元, β 的值还应该减小。 β 的值越小就越能保证数值计算的稳定性, 但也会需要更多的迭代来达到某个精度。

在求虚拟质量密度 ρ 时, 令时间步长 $\Delta t = 1$, 可以保证变形波穿越任何尺寸和刚度的单元所需时间相同, 并且导致在动态松弛法中惟一需调整的系统参数只有 β 。

在本文进行数值计算时时, β 值设定为 0.78 ($\beta^2 = 0.6$) 以获得计算的稳定性。可以根据计算信息调整其他参数以保持和优化整个平衡迭代的收敛性^[7]。

2.4 收敛准则

在本文的数值分析中, 通过下面的标准来检验计算的收敛:

(1) 整体残余力标准

$$\frac{(\|\mathbf{P} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\text{init}}\|)^2}{(\|\mathbf{F}\|)^2} \leq t_1 \quad (12)$$

(2) 每步迭代时整体内能的增量, 即残余力对位移增量所做的功:

$$\frac{\Delta t \dot{\mathbf{u}}^T (\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\text{init}})}{(\Delta t \dot{\mathbf{u}}_0^T \mathbf{F})^2} \leq t_2 \quad (13)$$

(3) 两次相邻迭代之间的整体残余力标准差

$$(\|\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\text{init}}\|)_n^2 - (\|\mathbf{F} - \mathbf{P} + \mathbf{P}^{\text{init}}\|)_{n+1}^2 \leq t_3 \quad (14)$$

式中: n 和 $n+1$ 分别为两个连续的计算迭代; t_1 、 t_2 和 t_3 分别为收敛标准值, 为了保证非线性计算有效的收敛, 本文研究的全部解析取 $t_1 = t_2 = t_3 = 10^{-6}$ 。

3 梁单元有限元模型

在有限元中引入动态松弛算法, 需要为每个梁单元构建一个质量矩阵。考虑到显式动态松弛法的稳定性条件, 构建了虚拟质量矩阵。

首先, 由式 (11) 中可得动态的稳定性算法中波的速度是影响稳定性的一个因素。在梁单元中, 波的传播速度计算分为两种: 沿梁纵向和横向传播的纵向波和横向波。

3.1 波传播速度

(1) 纵向波

从一维波方程可得到纵向波速 V_c 为

$$V_c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15)$$

式中: E 为弹性模量; ρ 为梁的质量密度。

对于杆单元这种没有抗弯刚度的特殊情况, 只需考虑纵向波速 V_c 。把式 (15) 代入到式 (11) 中并令 $\Delta t = 1.0$ (Δt 在虚拟动态分析中可以取任意值), 则梁单元或者杆单元纵向波对应的虚拟密度 ρ_c 可表示为

$$\rho_c = \frac{1}{\beta^2} \frac{E}{L^2} \quad (16)$$

(2) 横向波

梁单元的横向波速取决于振动系统的固有频率或波长。通过求解梁（质量均匀分布）横向传播的动态平衡方程^[19]可以得到横向波速 V_b 的一般表达式为

$$V_b = \frac{a_n}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (17)$$

式中： I 为惯性矩； A 为横截面面积；系数 a_n 是由边界条件决定的，例如，梁端部的支撑条件。

对于第 n 阶固有频率可以得到系数 a_n 、固有频率 ω_n 、波长 λ_n 和相对应的第 n 阶的横向波速 V_{bn} ，对于本文采用的简支梁，其表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= n\pi \\ \omega_n &= \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \lambda_n &= \frac{2L}{n} \\ V_{bn} &= \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

对于悬臂梁，其表达式为

$$\left. \begin{aligned} a_n &= (n-1/2)\pi \quad (n \geq 2) \\ \omega_n &= \frac{(n-1/2)^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \\ \lambda_n &= \frac{2L}{n-1/2} \\ V_{bn} &= \frac{(n-1/2)\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n \geq 2) \\ V_{bn} &= \frac{0.597\pi}{L} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \quad (n=2) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

3.2 质量矩阵

为使梁单元的局部和整体坐标一致，将上述纵向波和横向波的虚拟质量定义在相应的自由度上。假设通过式(16)可以得到梁单元的另一虚拟密度 ρ_b ，将其代入到式(15)可以推得相应的纵向压缩波速 V_{cb} 为

$$V_{cb} = \sqrt{\frac{E}{\rho_b}} = \frac{\beta}{a_n} L^2 \sqrt{\frac{A}{I}} \quad (20)$$

将式(20)代入到 Courant-Friedrichs-Levy 条件方程(11)中，且令 $\Delta t = 1.0$ ，有

$$1 \leq \beta \frac{L}{V_{cb}} = \beta L \frac{a_n}{\beta} \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{I}{A}} = \frac{a_n}{L} \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (21)$$

从式(21)可见，稳定条件取决于梁单元的几何属性（例如 A 、 I 、 L ）。如果虚拟密度 ρ_b 取决于所有转换自由度，考虑到梁的轴向变形，为了保证数值分析的稳定性，应该满足式(21)要求。同样对于 ρ_c 也有相似的关系式。因此，基于保守的原则，梁单元的虚拟密度 ρ_t 应取两者中较大值：

$$\rho_t = \max(\rho_b, \rho_c) \quad (22)$$

因此，梁单元质量矩阵中对角线上的分量 m 可用下式表示：

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_{x_i} & m_{y_i} & m_{t_i} & m_{x_j} & m_{y_j} & m_{t_j} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} m_t & m_t & m_t & m_t & m_t & m_t \end{bmatrix}^T \quad (23)$$

式中：对于平动位移有

$$m_t = m_x = m_y = \frac{1}{2} \rho_t AL \quad (24)$$

对于转动位移有

$$m_r = m_{r_i} = m_{r_j} = \int_0^L \rho_b A r^2 dr = \frac{1}{3} \rho_b AL^3 \quad (25)$$

式中 r 为积分点距离梁单元端点的距离。

4 梁单元性能验证

假定简支梁的弹性模量 $E=98.1$ MPa，泊松比 $\nu=0.1$ ，横截面面积 $A=10$ mm²，惯性矩 $I=100$ mm⁴，跨度 $L=0.1$ m，跨中作用一个集中为 $F=9.8$ N。由结构力学理论得到该简支梁跨中最大弯矩 $M_{\max}=FL/4=2.45 \times 10^{-4}$ kN·m，剪力 $V=4.9$ kN，跨中最大挠度 $u_{\max}=\frac{1}{48} \frac{FL^3}{EI}=20.8$ mm。

在当前的基于动态松弛法的有限元分析源代码中使用了上述定义的虚拟质量矩阵，并建立该简支梁的有限元模型。图1为有限元分析得到的简支梁的弯矩图和剪力图，可以看到，跨中最大弯矩为 2.45×10^{-4} kN·m，剪力为4.89 N。与上述理论解比较，可见基于动态松弛法的梁单元有限元分析结果与简支梁的理论计算结果吻合。

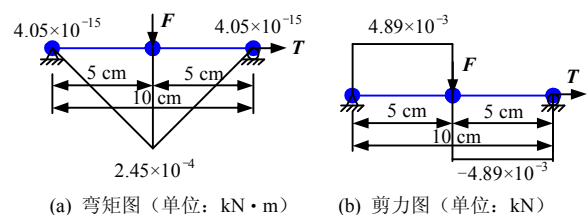


图1 简支梁有限元计算结果
Fig.1 Finite element results of simple beam

5 加筋砂土地基有限元模拟

本文根据 Tatsuoka 等^[20-21]所做的加筋砂土地基承载能力的一系列室内模型试验结果, 基于笔者已有的动态松弛法有限元程序, 在加筋砂土结构中, 对砂土采用非相关流动的等向硬化-软化弹塑性模型^[12-14]; 对加筋材料采用上述梁单元或杆单元分别建立了相应的有限元模型; 加筋材料和砂土之间的接触部分采用弱面单元^[22]。分析了在加筋砂土结构中, 加筋材料的抗拉刚度和抗弯刚度分别对加筋砂土地基承载能力的影响。

5.1 加筋砂土室内试验及数值模型的建立

平面应变条件下加筋砂土地基室内模型试验的概要如图 2 所示, 模型地基长为 40 cm (ε_2 方向), 宽为 183 cm, 高为 74 cm。空气干燥的日本奉浦砂自由落入砂箱形成地基, 砂土的相对密度 $D_r = 80\% \sim 86\%$ 。地基中布置了磷青铜条带加筋材料。砂箱的边壁由 3 cm 厚的刚性透明聚丙烯板组成, 可确保平面应变条件。试验的工况组合见图 3, 图中 L 为加筋材料的长度, B 为基础宽度, n 为筋材的层数, 筋材间距 $d=0.3B$ 。

由于地基的对称特点, 有限元分析仅取模型地基区域的 1/2。图 4 所示为加筋砂土地基室内模型的有限元网格, 它由四节点四边形平面应变单元组成。单元和节点的总数分别为 540 和 581。砂土本构关系采用了非相关流动的等向硬化-软化弹塑性模型^[11-14], 其应力更新也是基于动态松弛法, 其弹塑性模型参数见表 1。筋材与土之间采用了弱面单元^[22], 本文中采用的弱面单元厚度与筋材附近的砂土单元尺寸保持一致, 取厚度为 1 cm。另外砂土接触弱面单元节点始终与梁单元的节点保持一致, 且弱面单元采用与砂土同样的本构关系 (参数见表 1), 与砂土单元的区别在于其强度峰值小于砂土单元 (文中取界面峰值摩擦角为 33.6°)。对青铜加筋

材料采用上述梁单元或杆单元建立了相应的有限元模型。

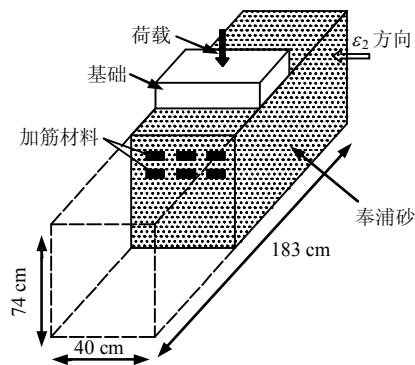


图 2 室内模型试验概要图

Fig.2 Setup of laboratory model test

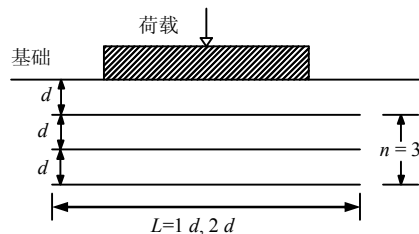


图 3 模拟室内试验的工况组合

Fig.3 Group of physical test for simulation

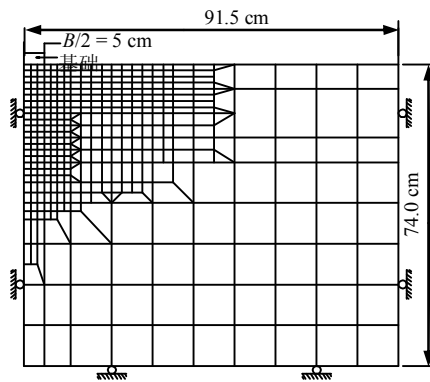


图 4 有限元网格

Fig.4 Finite element meshes

表 1 砂土弹塑性本构模型参数

Table 1 Parameters for elastoplastic constitutive model of sands

弹性模观各向同性参数					修正塑性功硬化参数					
σ_0/kPa	E_{v0}/kPa	E_{h0}/kPa	ν_0	m	a	b	h	n	r	w_r
98.1	1820	1638	0.163	0.494	0.128 8	3.5×10^{-5}	0.431	0.9	0.09	0.28

5.2 筋材抗拉刚度 (EA) 效应

图 5 为室内试验中筋材长度 $L/B=2$, 层数 $n=3$ 情况下, 采用不同类型筋材的荷载-沉降关系。类型 1 加筋条带是由磷青铜制成, 厚度为 0.5 mm, 宽度为 3 mm, 且表面粘结有模型砂土颗粒。类型 2 和类型 3 加筋条带的材料与类型 1 相同, 但厚度分别

为 0.5 mm 和 0.1 mm, 并且表面附有适量的钢丝, 钢丝直径为 1 mm, 间距为 1.0 cm。类型 4 加筋条带是由铝箔制成, 厚度为 0.05 mm, 表面附有与类型 2、3 相同的钢筋。对于类型 2、3 和 4 加筋材料, 抗拉刚度 EA 和抗拉强度依次减小。从图中可以看到, 除非筋材发生断裂破坏, 其他采用不同抗拉刚

度的筋材的加筋地基承载力特征值之间的差异非常小,可以忽略不计。对于筋材刚性很小的情况,筋材抗拉刚度效应变得比较显著。

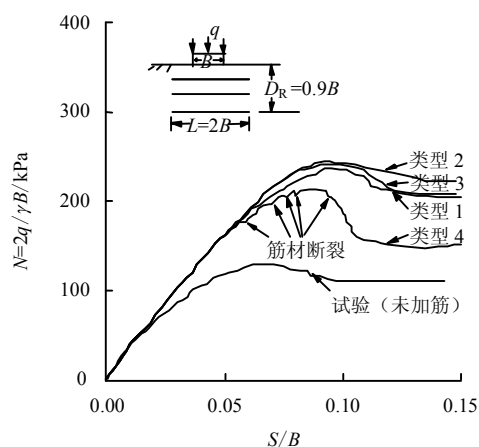


图5 类型1~4筋材对应的荷载-沉降关系(室内试验)

Fig.5 Load-settlement relations for reinforcement types 1 to 4 (laboratory tests)

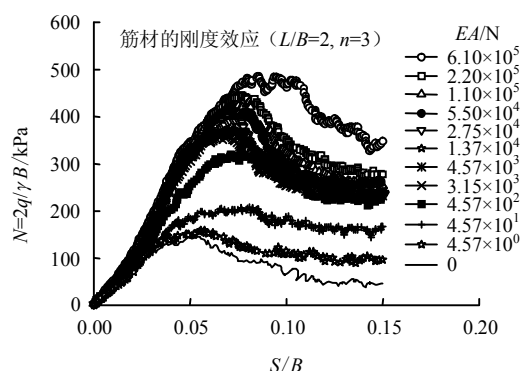


图6 不同抗拉刚度 EA 下荷载-沉降关系
Fig.6 Load-settlement relations for different tensile stiffnesses

采用有限元对筋材长度 $L/B=2$, 层数 $n=3$ 相同, 而 EA 不同的几种工况进行了分析, 以验证筋材抗拉刚度的效应。图6为采用不同 EA 值的筋材工况下标准荷载-沉降关系。从图中看到, 筋材的 EA 较小时, EA 值改变引起的地基承载力变化很小; 而筋材 EA 较大时, EA 值改变引起的地基承载力变化才较明显。可见有限元分析结果与试验结果吻合。

5.3 筋材抗弯刚度 (EI) 效应

图7为当加筋材料分别采用梁单元和杆单元进行有限元分析得到的筋材长度 $L/B=1, 2$ (层数 $n=3$) 两种工况下的标准荷载-沉降关系, 并与室内试验结果进行比较, 以研究筋材抗弯刚度效应。

对于短筋材层 ($L/B=1$) 情况 (筋材未穿过剪切带), 在峰值荷载前阶段, 使用梁单元和杆单元得

到的荷载-沉降关系非常相似。但在峰值荷载之后阶段 (模型出现剪切带), 采用杆单元的结果与室内试验结果更为接近。这说明此种加筋形式只需考虑筋材的抗拉刚度, 抗拉刚度是筋材性能的控制因素, 因此, 采用杆单元对加筋砂土地基进行有限元分析更为合理。

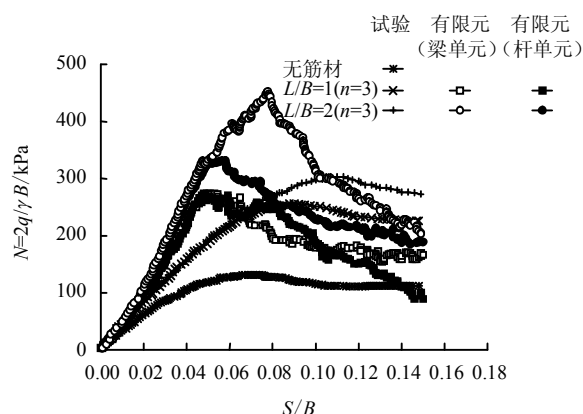


图7 $L/B=1$ 和 2 ($n=3$) 两种加筋形式采用梁单元或者杆单元所得的荷载-沉降关系

Fig.7 Load-settlement relations when using either beam or bar elements for the reinforcing pattern of $L/B=1$ and 2 , and $n=3$

对于长筋材层 ($L/B=2$) 情况 (筋材穿过剪切带), 由于抗弯刚度的影响, 使得峰值荷载差异相当大。在峰值荷载之前阶段, 考虑与不考虑筋材抗弯刚度两种工况所得的有限元结果相近。不考虑抗弯刚度工况下峰值荷载是考虑抗弯刚度工况的 $2/3$, 并且与室内试验结果更为接近。结果表明, 仅当加筋地基中出现剪切带, 且剪切带横穿加筋层时, 通过限制剪切带的扩展, 筋材的抗弯刚度可以有效地提高加筋土的极限承载能力。而在剪切带出现之前的阶段, 对于研究加筋砂土的加强机制, 筋材的抗弯刚度效应则不明显。

6 结 论

(1) 通过构建梁单元的刚度矩阵和虚拟质量矩阵, 建立了基于 DR 法的梁单元有限元模型。对简支梁的模拟, 验证了该梁单元的合理性。对加筋砂土地基室内试验的模拟, 筋材抗拉刚度对加筋砂土地基承载能力的影响很小; 抗弯刚度对加筋砂土地基承载能力影响程度与加筋材料的布置形式有关。

(2) 加筋砂土中筋材可以采用梁单元或杆单元模拟。对于加筋材料的不同布置形式, 使用杆单元的有限元的模拟结果较为理想, 但当加筋砂土中出现剪切带以后, 抗弯刚度对加筋砂土结构的承载能

力的影响开始逐渐增大。由于抗拉刚度对加筋地基承载能力影响较小, 而抗弯刚度影响较大, 且杆单元为梁单元的一种情况, 所以在分析加筋砂土结构增强机制时, 推荐采用梁单元 (具有一定的抗弯刚度) 模拟筋材。

参 考 文 献

- [1] ZIENKIEWICZ O C, VALLIAPPAN S, KING I P. Elasto-plastic solutions of engineering problems “initial stress” finite element approach[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1969, 1(1): 75—100.
- [2] MATTHIES H, STRANG G. The solution of nonlinear finite element equations[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1979, 14(11): 1613—1626.
- [3] DAY A S. An introduction to dynamic relaxation[J]. **The Engineer**, 1965, 219: 218—221.
- [4] OTTER J R H. Dynamic relaxation[J]. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, 1966, 35: 633—656.
- [5] WEMPNER G A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids[J]. **International Journal of Solids and Structures**, 1971, 7(11): 1581—1599.
- [6] BATOZ J L, DHATT G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1979, 14(8): 1262—1267.
- [7] UNDERWOOD P G. Dynamic relaxation—a review[C]// **Computational Methods for Transient Dynamic Analysis**. Amsterdam: [s. n.], 1983.
- [8] CUNDALL P A. The measurement and analysis of acceleration in rock slopes[D]. London: University of London, Imperial College Science and Technology, 1971.
- [9] CUNDALL P A. A computer model for simulating progressive, large-scale movements in blocky rock systems[C]// **Proceedings of Symp. Int. Society of Rock Mechanics**. Nancy, France: [s. n.], 1971: 11—18.
- [10] TANAKA T, KAWAMOTO O. Three-dimensional finite element collapse analysis for foundations and slopes using dynamic relation[C]// **Proceedings of Sixth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics**. Innsbruck: Balkema A. A., 1988: 1213—1218.
- [11] TATSUOKA F, OKAHARA M, TANAKA T, et al. Progressive failure and particle size effect in bearing capacity of a footing on sand[C]// **Geotechnical Engineering Congress Vol.II**. [S. l.]: ASCE, 1991: 788—802.
- [12] SIDDIQUEE M S A. FEM simulation of deformation and failure of stiff geomaterials based on element results[D]. Tokyo: The University of Tokyo, 1994.
- [13] KOTAKE N. FEM simulation of deformation and failure of reinforced soil[D]. Tokyo: The University of Tokyo, 1999.
- [14] PENG F L. Constitutive modeling and finite element analysis of reinforced soils[D]. Tokyo: The University of Tokyo, 2000.
- [15] CASSELL A C. Shells of revolution under arbitrary loading and the use of fictitious densities in dynamic relaxation[J]. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, 1970, 45: 65—78.
- [16] PAPADRAKAKIS M. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters[J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1981, 25(1): 35—48.
- [17] BUNCE J W. A note on the estimation of critical damping in dynamic relaxation[J]. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 1972, 4(2): 301—303.
- [18] COURANT R, FRIEDRICHS K, LEVY H. On the partial difference equations of mathematical physics[J]. **Mathematische Annalen**, 1928, 100: 32—74.
- [19] BIGGS J M. Introduction to structural dynamics[M]. New York: McGraw-Hill Inc., 1964.
- [20] TATSUOKA F, HUANG C C, MORIMOTO T. Stress characteristics for shallow footing in cohesionless slopes: Discussion[J]. **Canadian Geotechnical Journal**, 1989, 26(4): 748—756.
- [21] TATSUOKA F, SIDDIQUEE M S A, PARK C. Modeling stress-strain relations of sand[J]. **Soils and Foundations**, 1993, 33(2): 60—81.
- [22] 曹延波, 彭芳乐, 龙岗文夫. 一种描述加筋材与砂土接触作用机理的弱面单元[J]. **湖南大学学报 (自然科学版)**, 2008, 35(增刊): 226—230.
- CAO Yan-bo, PENG Fang-le, TATSUOKA F. A thin and weak interface model to simulate the contact mechanism between geosynthetic reinforcement and sand[J]. **Journal of Hunan University (Natural Sciences)**, 2008, 35(Supp.): 226—230.